

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

---

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

---

## SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

### EXERCICE 1 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits.

Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

- (a) [0,713 ; 0,771]      (b) [0,692 ; 0,808]      (c) [0,754 ; 0,813]      (d) [0,701 ; 0,799]

2. En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [4 ; 11]. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

- (a)  $\frac{6}{11}$       (b)  $\frac{10}{7}$       (c)  $\frac{10}{11}$       (d)  $\frac{6}{7}$

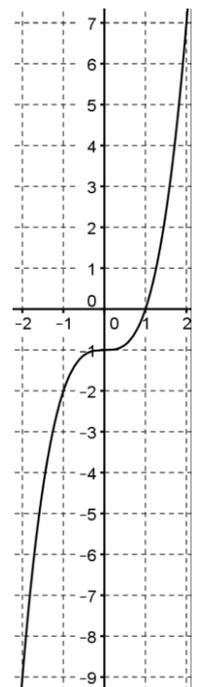
3. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = (x + 1)e^{-2x+3}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et sa fonction dérivée  $f'$  est donnée par :

- (a)  $f(x) = -2e^{-2x+3}$       (b)  $f'(x) = e^{-2x+3}$   
(c)  $f'(x) = (-2x + 3)e^{-2x+3}$       (d)  $f'(x) = (-2x - 1)e^{-2x+3}$

4. On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  telle que sa fonction dérivée  $f'$  soit aussi dérivable sur  $\mathbf{R}$ . La courbe ci-contre représente la fonction  $f''$ .

On peut alors affirmer que :

- (a)  $f$  est convexe sur  $[-2 ; 2]$ .      (b)  $f$  est concave sur  $[-2 ; 2]$ .  
(c) La courbe représentative de  $f$  sur  $[-2 ; 2]$  admet un point d'inflexion.      (d)  $f'$  est croissante sur  $[-2 ; 2]$ .



## EXERCICE 2 – 5 points

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1<sup>er</sup> janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $c_n$  la probabilité de l'événement « Hugo court le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $r_n$  la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $P_n$  la matrice  $(c_n \ r_n)$  correspondant à l'état probabiliste le  $(n + 1)$ -ième jour.

Le 1<sup>er</sup> janvier 2014, motivé, le jeune homme court.

On a donc :  $P_0 = (c_0 \ r_0) = (1 \ 0)$ .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne  $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$ .  
Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité  $c_6$  qu'Hugo coure le 7<sup>e</sup> jour ?  
Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $c_6$ .
4.
  - a. Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = c_n - 0,75$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .
  - c. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$ .
  - d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
  - e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.  
Comment valider votre conjecture ?

### EXERCICE 3 – 5 points

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

*Les PARTIES A et B sont indépendantes.*

#### PARTIE A

1. Calculer  $P(R)$ , la probabilité de l'événement R.
2. 35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F.
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français. Montrer que  $P(F \cap \bar{R}) = 0,28$ .
5. En déduire  $P_{\bar{R}}(F)$  et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

#### PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance  $\mu = 30$  et d'écart-type  $\sigma = 10$ .

Le propriétaire écoute de la musique.

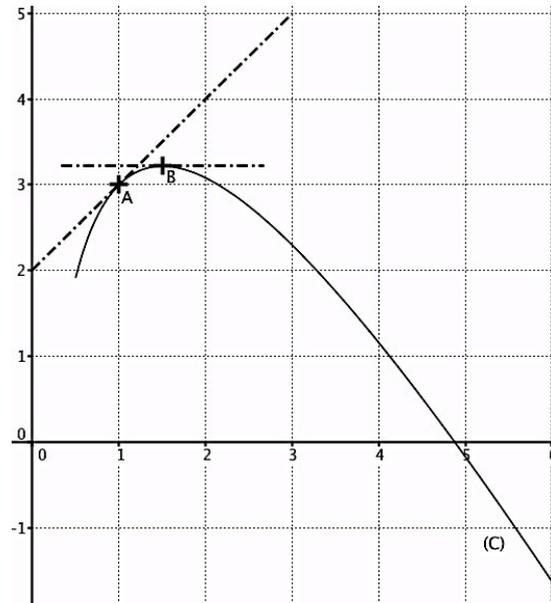
1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

### EXERCICE 4 – 6 points

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0,5 ; 6]$ . Les points A(1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).

Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

#### PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer  $f'(1,5)$ .
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .
4. Déterminer la convexité de la fonction  $f$  sur  $[0,5 ; 6]$ . Argumenter la réponse.

#### PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $[0,5 ; 6]$  par  $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$ .

1. Pour tout réel  $x$  de  $[0,5 ; 6]$ , calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$ .
2. Étudier le signe de  $f'$  sur  $[0,5 ; 6]$  puis dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0,5 ; 6]$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement une solution  $\alpha$  sur  $[0,5 ; 6]$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
4. En déduire le tableau de signe de  $f$  sur  $[0,5 ; 6]$ .
5. On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0,5 ; 6]$  par  $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$ .
  - a. Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0,5 ; 6]$ .
  - b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ . En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.